

Colégio GEO João Pessoa
3º Ano do Ensino Médio

Prof. Pedro Júnior
pedromatematico06@gmail.com

19 de Fevereiro de 2010

Resolução da Lista 01 - Números Complexos

1 Forma Algébrica

E₀₁ Resolva a equação $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Resolução: O discriminante dessa equação é: $\Delta = -36$. Baseado nas hipóteses adotadas, escrevemos:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} \\x_{1,2} &= \frac{4 \pm 6i}{2} \\x_{1,2} &= 2 \pm 3i \\S &= \{2 + 3i; 2 - 3i\}\end{aligned}$$

E₀₂ Resolva a equação $x^3 + 8 = 0$.

Resolução: Lembrando a fatoração $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$$\begin{aligned}x^3 + 2^3 &= 0 \\(x + 2)(x^2 + 2x + 4) &= 0\end{aligned}$$

daí vem que

$$\begin{aligned}x + 2 &= 0 \implies x = -2 \\x^2 + 2x + 4 &= 0 \implies \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ x_2 = 1 - \sqrt{3}i \end{cases}\end{aligned}$$

Logo o conjunto solução da equação será:

$$S = \{-2; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i\}$$

E₀₃ Determine as raízes quadradas de $3 - 4i$.

Resolução:

1º Modo Queremos encontrar $\sqrt{3 - 4i}$, e sabemos que as raízes quadradas de números complexos são números complexos, ou seja, os números que estamos procurando são da forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Logo devemos ter $\sqrt{3 - 4i} = a + bi \Rightarrow (a + bi)^2 = 3 - 4i$ posso, nesse momento afirmar que tal equação é simples, pois a equação é de grau dois em duas incógnitas, após desenvolver basta usar o fato dos complexos serem iguais resultando dessa forma num sistema de equações não-lineares, vejamos

$$\begin{aligned}(a + bi)^2 &= 3 - 4i \\ a^2 - b^2 + 2abi &= 3 - 4i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 + 3 \\ 2ab = -4 \Rightarrow ab = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Da equação $ab = -2$, elevamos os dois membros ao quadrado encontramos $a^2b^2 = 4$, agora substituímos a^2 por $b^2 + 3$, daí vem que

$$\begin{aligned}a^2b^2 &= 4 \Rightarrow (b^2 + 3)b^2 = 4 \\ b^4 + 3b^2 - 4 &= 0 \text{ (faça: } b^2 = y, y \geq 0) \\ y^2 + 3y - 4 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \text{ (não serve!)} \\ y_2 = 1 \end{cases} \\ \text{Para } y &= 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a = \mp 2\end{aligned}$$

Ou seja, os números procurados são $2 - i$ e $-2 + i$. Conclusão:

$$\sqrt{3 - 4i} = \begin{cases} 2 - i \\ -2 + i \end{cases}$$

2º Modo Poderíamos usar um resultado bastante conhecido, é a fórmula de transformação de RADICAIS DUPLOS:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

vejam:

$$\sqrt{3 - 4i} = \sqrt{3 - \sqrt{16i^2}} = \sqrt{3 - \sqrt{-16}}$$

aplicando a fórmula de transformação com $A = 3$ e $B = -16$, temos

$$\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{9 - (-16)} = 5$$

e um dos valores de

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{3 - 4i}$$

é

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} &= \sqrt{\frac{3 + 5}{2}} - \sqrt{\frac{3 - 5}{2}} \\ &= 2 - \sqrt{-1} \\ &= 2 - i\end{aligned}$$

é claro que a outra raiz é $-(2 - i) = -2 + i$.

E₀₄ Determine os complexos z tais que $z + \frac{1}{z} = 1$.

Resolução: Multiplicando a equação por “ z ”, encontraremos

$$\begin{aligned}z^2 - z + 1 &= 0 \Rightarrow \Delta = -3 \\z &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

Logo, os complexos que satisfazem a equação acima são $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

E₀₅ (IME) Mostre que a seguinte expressão representa um complexo (ou mais de um), e escreva-o(s) na forma $x + yi$.

$$\frac{1}{\sqrt{7+24i}}$$

Resolução: Vamos, inicialmente, calcular $\sqrt{7+24i}$. No problema **E₀₃**, **2º Modo**, vimos que podemos fazer $\sqrt{7+24i} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. De modo análogo, chegaremos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 7 \\ ab = 12 \end{cases}$$

continuando chegaremos que $a = \pm 4$ e $b = \pm 3$. Ou seja, $\sqrt{7+24i} = \pm(4+3i)$. De onde segue:

$$\frac{1}{\sqrt{7+24i}} = \pm \frac{1}{4+3i} = \pm \frac{4-3i}{25} = \pm \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \right) \in \mathbb{C}$$

E₀₆ Quais os possíveis valores reais de x e y que satisfazem a igualdade $(x+yi)^2 = 8i$?

Resolução: Desenvolvendo o produto notável temos a seguinte igualdade $x^2 - y^2 + 2xyi = 0 + 8i$, daí usaremos o fato dos complexos serem iguais, resultando dessa maneira num sistema de equações não-lineares.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

Ou seja, pela equação $xy = 4$ podemos perceber que x e y têm os mesmos sinais, logo $x = y = \pm 2$.

E₀₇ Os números complexos z tais que

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 4 \\ z \cdot \bar{z} = 13 \end{cases}$$

são representados no plano de *Argand - Gauss* pelos pontos A e B . Qual é a área do triângulo ABO , sendo O a origem do plano?

Resolução: Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Daí vem que

$$z + \bar{z} = 4 \Rightarrow a + bi + a - bi = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

de acordo com a outra equação temos

$$\begin{aligned}z \cdot \bar{z} &= 13 \Rightarrow (a + bi)(a - bi) = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13 \\ b^2 &= 9 \Rightarrow b = \pm 3\end{aligned}$$

Portanto, temos $a = 2$ e $b = \pm 3$, logo $A = z_1 = 2 + 3i$ e $B = z_2 = 2 - 3i$, daí temos: $A(2,3)$, $B(2, -3)$ e $O(0,0)$. Portanto a área do triângulo ABO será dado por $S_{ABO} = \frac{|D|}{2}$ onde D é o determinante da matriz formada pelos pontos A, B e O.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Logo, $S_{ABO} = \frac{12}{2} = 6$.

E08 (ITA - 07) Considere a equação:

$$16 \left(\frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} \right)^4$$

sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

- (a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 12 (e) 15

Resolução: Faremos inicialmente as simplificações previstas no segundo membro da igualdade e logo em seguida resolve a equação resultante:

$$\begin{aligned} 16 \left(\frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 &= \left(\frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} \right)^4 \\ 16 \left(\frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 &= \left(\frac{2i - (-2i)}{2} \right)^4 \\ 16 \left(\frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 &= 16 \\ \left(\frac{1-ix}{1+ix} \right)^3 &= 1 \Rightarrow (1-ix)^3 = (1+ix)^3 \\ 2ix^3 - 6ix &= 0 \Rightarrow 2i(x^3 - 3x) = 0 \\ x^3 - 3x &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

como o problema está pedindo para encontrar a soma dos quadrados, temos:

$$0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$$

E09 (Lidski) Determine o número de soluções da equação

$$z^2 + |z| = 0.$$

nota: Se $z = a + bi$, então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ onde $|z|$ representa o *módulo* de z .

Resolução: Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação temos:

$$\begin{aligned} (x+yi)^2 + |x+yi| &= 0 \\ x^2 - y^2 + 2xyi + \sqrt{x^2 + y^2} &= 0 \\ \underbrace{x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{Re}} + \underbrace{2xyi}_{\text{Im}} &= 0 + 0 \cdot i \end{aligned}$$

Usando a identidade de complexos, encontramos o seguinte sistema

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

como, $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, podemos transformar nosso sistema em dois:

$$S_1 : \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad S_2 : \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

De S_1 , resulta que $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + |x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. E, S_2 , resulta em $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = |y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$.
Segue então que a equação tem 3 soluções. São elas:

$$\{0, i, -i\}$$

E₁₀ Se $z = a + bi$ é um número complexo tal que são satisfeitas as igualdades $z^{2005} = 3 + 4i$ e $z^{2006} = 2 + 11i$, onde $i^2 = -1$, determine o valor de $a + b$.

Resolução: Podemos usar as propriedades de potência para resolver nosso problema, vejamos:

$$\begin{aligned} z^{2006} &= 2 + 11i \\ z \cdot z^{2005} &= 2 + 11i \\ (a + bi)(3 + 4i) &= 2 + 11i \\ a + bi &= \frac{2 + 11i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\ a + bi &= \frac{6 - 8i + 33i + 44}{3^2 + 4^2} \\ a + bi &= \frac{50 + 25i}{25} = 2 + i \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $a + b = 3$.

2 Mais Problemas

E₁₁ Seja a equação $z^4 - z^2 + 1 = 0$ com $z \in \mathbb{C}$. Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

(a) $2\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $-i$ (d) $\frac{i}{2}$ (e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução: seja $z^2 = y$, $y \in \mathbb{C}$. Daí vem que:

$$\begin{aligned} y^2 - y + 1 &= 0 \\ \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ \Delta &= -3 \\ y &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ z^2 &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

separando temos:

$$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{ou} \quad z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Seja $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Substituindo na 1ª equação temos:

$$\begin{aligned} (a + bi)^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ a^2 + 2abi - b^2 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} &\implies \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} + b^2 \\ 16a^2b^2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo a equação de cima na de baixo temos:

$$\begin{aligned} 16 \left(\frac{1}{2} + b^2 \right) b^2 &= 3 \implies 16b^4 + 8b^2 - 3 = 0 \implies \Delta = 16^2 \\ b^2 &= \frac{-8 \pm 16}{32} \implies \begin{cases} b^2 = \frac{-8 - 16}{32} = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4} \text{ (não serve!)} \\ b^2 = \frac{-8 + 16}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \end{cases} \\ b &= \pm \frac{1}{2} \implies a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \implies a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

de acordo com a equação $2ab = \frac{\sqrt{3}}{2}$ percebe-se facilmente que a e b possuem o mesmo sinal,

logo $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ou $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Substituindo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, na 2ª equação, temos:

$$\begin{aligned} (a + bi)^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ a^2 + 2abi - b^2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} &\implies \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} + b^2 \\ 16a^2b^2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

note que encontramos o mesmo sistema de equações encontrado no anterior. Logo quem nos

norteia nesse caso é a equação $2ab = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, onde percebe-se facilmente que a e b devem possuir

sinais contrários, logo $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ou $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Portanto temos

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right\}$$

e daí vem que a soma de duas raízes da equação pode ser 0 ou i ou $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$ ou $-i$.

Resposta: "C"

E₁₂ (ITA - SP) Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule

$$\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| = |z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60}|$$

Resolução: Racionalizando z encontramos, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ que claramente, na forma trigonométrica, será $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$. Seja S a soma dos termos da progressão geométrica $(z, z^2, z^3, \dots, z^{60})$, temos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} \\ S &= \frac{z (z^{60} - 1)}{z - 1} \\ |S| &= \frac{|z| |z^{60} - 1|}{|z - 1|} \end{aligned}$$

percebe-se facilmente que $|z| = 1$, e de acordo com a 1ª fórmula de *D'Moivre* temos que

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \\ z^{60} &= |z|^{60} \left[\cos\left(\frac{60\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{60\pi}{4}\right) \right] \\ z^{60} &= \cos 15\pi + i \sin 15\pi \\ z^{60} &= -1 \end{aligned}$$

daí vem que $|z^{60} - 1| = |-1 - 1| = 2$, agora vamos calcular $|z - 1|$:

$$\begin{aligned} z - 1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ |z - 1| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ |z - 1| &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Logo, substituindo na expressão temos:

$$\begin{aligned} |S| &= \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \\ |S| &= \sqrt{2\sqrt{2} + 4} \end{aligned}$$